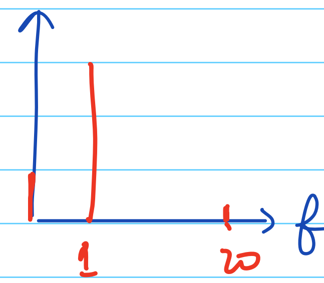
TDE1

Exercice 2 - Filtrage

1)



2) $e(t) = 1 + 3\cos(2\pi \times 1000\,t) + 0{,}1\cos(2\pi \times 2000t + \pi/2)$

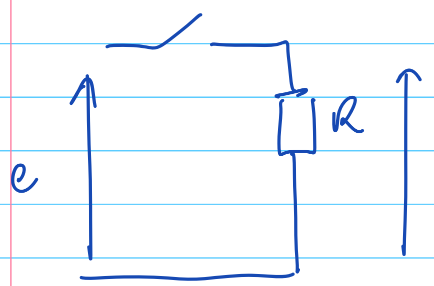
3) 1) Il ne reste que la composante continue
2) composante continue + fondamental
3) Signal conservé

4) signal rendu alternatif
5) seul le bruit est conservé
6) dérivée du signal

7) seul le bruit est conservé
8) Bruit + valeur moyenne conservés

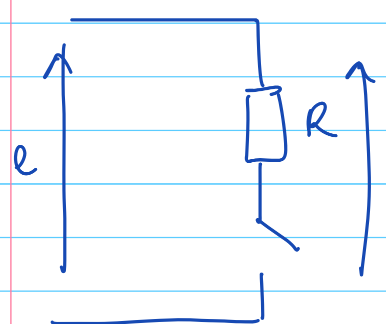
Exercice 3 - Passe-haut

1) Le circuit équivalent en basse fréquence est



$s = Ri = 0$ car l'interrupteur ouvert impose $i = 0$

En haute fréquence :



$s = e$

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut

2) Par le pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{H} = \frac{Rj\omega C - LC\omega^2}{1 + Rj\omega C - LC\omega^2} \qquad RC = \frac{1}{\omega_0 Q} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

On a alors $\underline{H} = \dfrac{jx/Q - x^2}{1 + jx/Q - x^2}$.

3) En basses fréquences, la fonction de transfert équivalente est $\underline{H}_{BF} = \dfrac{jx/Q}{1} = j\dfrac{x}{Q}$

On a alors $G_{dB\,BF}(x) = 20 \log x - 20 \log Q$

↳ d'où une pente $+20$ dB/décade

en hautes fréquences, on a $\underline{H}_{HF} = \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$

d'où une pente nulle

Par ailleurs, on a sur l'asymptote BF le point $(1, -20)$

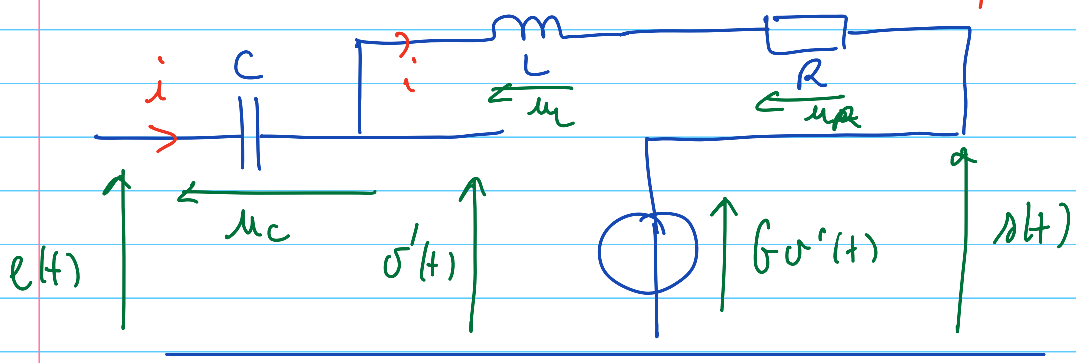
Donc $20 \log 1 - 20 \log Q = -20$

Donc $\log Q = 1$ soit $\boxed{Q = 10}$.

4) Si la fréquence du signal est très petite devant la fréquence propre du circuit, toutes les composantes sont sur la pente à $+20$dB/déc. Le circuit a alors un rôle dérivateur très atténuant. Il est donc logique d'obtenir un signal carré très atténué.

Si la fréquence du signal est seulement légèrement inférieure à la fréquence propre du circuit, les composantes basses sont atténuées, mais les hautes fréquences conservées. D'où l'obtention d'un signal formé d'une succession d'impulsions.

Exercice 4 - Stabilité d'un circuit électrique



1) On a $e(t) = s(t) + u_R + u_L + u_C$ par une loi des mailles

ie $e(t) = s + Ri + L\dfrac{di}{dt} + u_C$

$$= s + RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt} + u_C$$

or, on a également $e = u_C + v'(t)$ par une loi des mailles.

ayant $s = Gv'$, on a donc $u_C = e - \dfrac{s}{G}$

d'où

$$e(t) = s + RC\left(\frac{de}{dt} - \frac{1}{G}\frac{ds}{dt}\right) + LC\left(\frac{d^2e}{dt^2} - \frac{1}{G}\frac{d^2s}{dt^2}\right) + e - \frac{s}{G}$$

ie $GRC\dfrac{de}{dt} + GLC\dfrac{d^2e}{dt^2} = s(1-G) + RC\dfrac{ds}{dt} + LC\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

2) le circuit est stable si tous les coefficients du 1e membre de l'ED sont de même signe

ie si $1 - G > 0$

ie $\underline{G < 1}$ le montage n'est pas stable.

3) $s(t)$ aura au moins un terme exponentiel divergent.

$$\Delta = (RC)^2 - 4(1-G)LC \overset{G=2}{=} (RC)^2 + 4LC > 0$$

On a donc

$$s(t) = A\exp\left(\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2\times(-1)}t\right) + B\exp\left(\frac{-RC-\sqrt{\Delta}}{-2}t\right)$$

$$= A\exp\left(\frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{-2}t\right) + \underbrace{B\exp\left(\frac{RC+\sqrt{\Delta}}{2}t\right)}_{\text{terme divergent.}}$$

Exercice 5 - Filtrage

1) On peut faire une analyse de Fourier : si le spectre obtenu a un seul pic, le signal est bien sinusoïdal.

2) Le signal d'entrée n'est pas alternatif car il a une moyenne non nulle.
En revanche, la sortie est alternative.
Cela est cohérent avec la nature du filtre : le passe-bande ne laisse pas passer la composante continue.

3) Expérience 1 : un harmonique est égal à la fréquence propre du passe-bande
Il est donc amplifié tandis que les autres harmoniques sont atténuées

Expérience 2 : la majorité des harmoniques sont au niveau d'une asymptote $-20\,dB/dec$. Le filtre a alors un rôle intégrateur. L'amplitude est tout de même très atténuée

4) Tout d'abord, l'expérience 1 est telle que la fréquence de sortie est la fréquence propre du filtre (puisque l'amplitude diminue si on augmente ou diminue la fréquence du créneau).
Ainsi

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times \frac{1}{5 \times 50.10^{-6}} = \underline{2,5.10^4\ rad.s^{-1}}$$

Par ailleurs, le fondamental est l'harmonique sélectionné (puisque la fréquence en sortie est celle de l'entrée).
On peut dire par ailleurs que le signal de sortie est sinusoïdal.

Ainsi $\quad \underbrace{S_0}_{\text{amplitude du signal SINUSOIDAL en sortie}} = |\underline{H}(\omega_0)| \times \underbrace{\frac{2V_0}{\pi(2\times 0+1)}}_{\text{amplitude du fondamental}} = H_0 \times \frac{2V_0}{\pi}$

On a donc $H_0 = \frac{\pi S_0}{2V_0} = \frac{\pi \times 3 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 0{,}\cancel{1}} \simeq \underline{10}$.

Enfin, dans l'expérience 2, on a un comportement intégrateur :

$$\underline{H}_{HF} = \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Donc $\underline{e} = j\omega \frac{Q}{H_0\omega_0} \underline{s}$

Toutes les composantes SAUF la composante continue sont dans ce domaine HF. On a donc

$$e(t) - \frac{V_0}{2} = \frac{Q}{H_0\omega_0} \frac{ds}{dt}$$

On a donc $Q = \frac{H_0\omega_0}{ds/dt}\left(e(t) - \frac{V_0}{2}\right)$

en particulier $\forall t \in [0, T]$, on a $e(t) = V_0 = 2 \times 2 = \underline{4V}$.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\cancel{5} \times 0{,}\cancel{2}}{\cancel{2} \times \cancel{5}.10^{-6}} = 10^5 \, V/s$$

on monte de 5 carreaux de 0,2 V en 2 carreaux de 5 µs.

au final $Q = \frac{10 \times 2{,}5.10^4}{10^5}\left(4 - \frac{4}{2}\right) = \underline{5}$.

Pour aller + loin

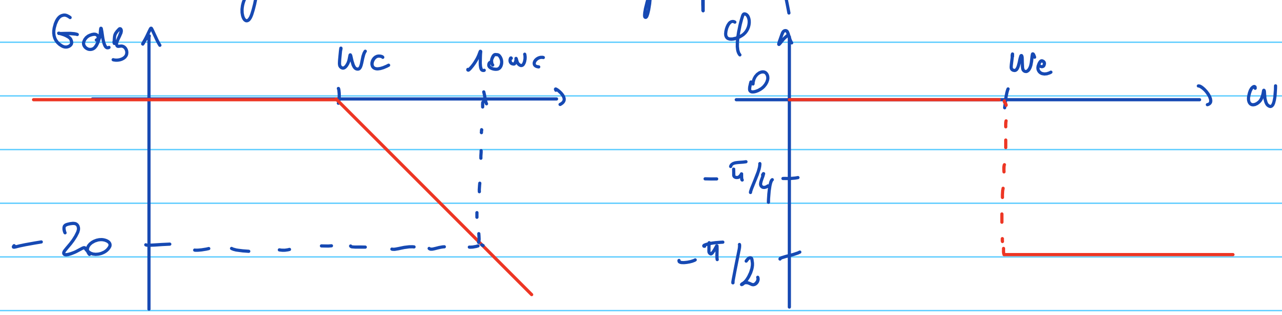
Exercice 6 - Mesure d'impédance par détection synchrone

1) R_1C_1 est un filtre passe-bas d'ordre 1.

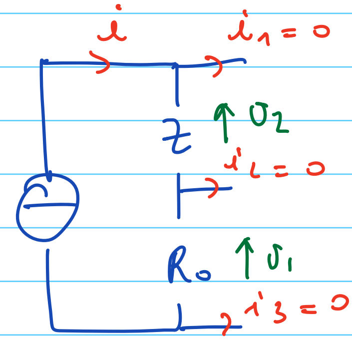
Un filtre passe-bas d'ordre 1 peut servir de moyenneur ou d'intégrateur (selon sa pulsation de coupure par rapport à la pulsation du signal d'entrée)

On a $\underline{H} = \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ avec $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$ (cf cours)

et son diagramme de Bode asymptotique :



2) On a



car l'impédance d'entrée du multiplieur est ∞.

On a donc $\underline{v_1} = R_0\,\underline{i}$ ie $\boxed{v_1(t) = R_0 I_0 \cos(\omega t)}$

et $\underline{v_2} = \underline{Z}\,\underline{i} = X I_0 e^{j\omega t} + jY I_0 e^{j\omega t}$

$= X I_0 (\cos\omega t + j\sin\omega t) + jY I_0 (\cos\omega t + j\sin\omega t)$

$$\boxed{u_2(t) = \mathrm{Re}(\underline{v_2}) = X I_0 \cos\omega t - Y I_0 \sin(\omega t)}$$

3) $U_1 e^{j\omega t} \times U_2 e^{j(\omega t+\varphi)} = U_1 U_2 (\cos\omega t + j\sin\omega t)(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi))$

$= U_1 U_2 (\cos(\omega t)\times\cos(\omega t+\varphi) - \sin\omega t \times \sin(\omega t+\varphi) + j\ldots)$

Ainsi $\mathrm{Re}\left(U_1 e^{j\omega t} \times U_2 e^{j(\omega t+\varphi)}\right) = U_1 U_2 \left(\cos(\omega t)\times\cos(\omega t+\varphi) \underbrace{- \sin\omega t \times \sin(\omega t+\varphi)}_{\neq 0}\right)$

$\neq U_1 U_2 \cos(\omega t)\times\cos(\omega t+\varphi)$

4) $v_3(t) = k\, v_1(t)\, v_2(t)$

$= k I_0^2 R_0 (X\cos^2(\omega t) - Y\cos(\omega t)\sin(\omega t))$

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ et $\cos\theta \times \sin\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$

$= k I_0^2 R_0 \left(X \dfrac{1+\cos 2\omega t}{2} - Y \dfrac{\sin 2\omega t}{2}\right)$

$= k I_0^2 R_0 \left(\dfrac{X}{2} + \dfrac{X}{2}\cos(2\omega t) - \dfrac{Y}{2}\sin(2\omega t)\right)$

$= k I_0^2 R_0 \left(\dfrac{X}{2} + C\cos(2\omega t+\varphi)\right)$

car $\ominus Y/2$

avec $C = \dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}}{2}$ $\quad \varphi = \arccos\left(\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$

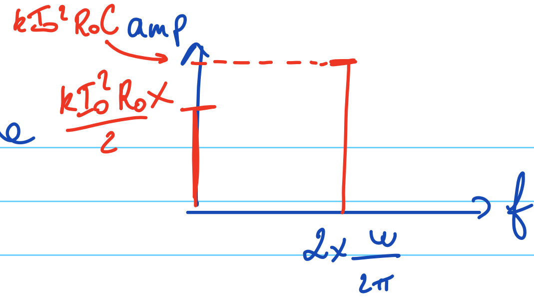
$C\cos(2\omega t+\varphi) = \underbrace{(C\cos\varphi)}_{=\frac{X}{2}}\cos(2\omega t) - \underbrace{(C\sin\varphi)}_{=-\frac{Y}{2}}\sin(2\omega t)$

$(C\cos\varphi)^2 + (C\sin\varphi)^2 = C^2 = \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{4} \Rightarrow C = \dfrac{\sqrt{X^2+Y^2}}{2}$

et $\sin\varphi > 0$

Donc $\cos\varphi = \dfrac{X}{2C} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$

On a donc le spectre



5) Si R_1 et C_1 sont choisis de sorte que R_1C_1 soit un moyenneur, on ne conserve en sortie que la valeur moyenne du signal v_3

ie $\quad k I_0^2 R_0 \frac{X}{2}$. $\Rightarrow$ on peut déduire X.

Pour cela il faut que le fondamental à 2ω soit filtré ie

$$\frac{1}{R_1C_1} \ll 2\omega \qquad \text{ie} \qquad R_1C_1 \gg \frac{1}{2\omega}$$

6) On aurait alors $v_2(t) = Re\left(\frac{I_0 e^{j\omega t}}{j\omega C_0}\right) = Re\left(\frac{I_0}{\omega C_0}(j\cos\omega t - \sin\omega t)\right)$

$$= -\frac{I_0}{\omega C_0}\sin(\omega t)$$

Lors de la multiplication, c'est donc le terme en sinus qui amènera une composante constante.
Par le même raisonnement, on aurait donc accès à Y.